

אكونומטריקה ב

פרק 5 - משוואות סימולטניות

תוכן העניינים

1. כללי

מושוואות סימולטניות:

רקע:

עוסקوت בהפרת ההנחה של אי תלות בין המב"ת לטיעויות בניבוי: $\text{cov}(x, u) = 0$.

ה- X -ים במשואה נחצבו משתנים אקסוגניים – משפיעים על Y אך לא מושפעים ממנו בחזרה לעומת זאת משתנים אנדווגניים – משפיעים על Y אך גם מושפעים ממנו בחזרה. מאחר ומשתנים אלו הם גם מסבירים וגם מוסבירים, הם נחצבים כמשתנים מקרים, המתואימים עם הטיעויות במודל: $\text{cov}(x, u) \neq 0$.

מושוואות המבנה (מושוואות סימולטניות):

מערכת מושוואות הכוללת משתנים מסבירים אנדווגניים ואקסוגניים.

בד"כ מדובר בשתי מושוואות אשר המשטנה המוסף בראשונה הוא משתנה מסביר בשנייה והמשטנה המוסף בשנייה הוא משתנה מסביר בראשונה.

משתנים המופיעים באחת המושוואות כמוסבירים ובאחרת כמסבירים הם משתנים אנדווגניים. יתר המשטנים במשוואות הם אקסוגניים.

המטרה היא לאמוד בצורה יعلاה את הפרמטרים (אלפות ובטות) ולבצע בדיקת השערות.

השלכות על אר"פ:

הנחה אי תלות בין המשטנה הב"ת והטיעויות שימשה אותנו להוכחת ליניאריות, חוסר הטיה ועקבות.

לכן הפרת המשמעות פגיעה בכל תכונות אר"פ. האומדים לא ליניארים, מוטים לא עקבאים ולכן גם לא יעילים (לפי גאוס מרקוב). אומד השונות מوطה גם הוא ובדיקה ההשערות לא תקפה (ללא תלות בגודל המדגם).

הצורה המוצוממת של מודל עם מושוואות סימולטניות:

מושוואות הצורה המוצוממת הן פתרון עבור המשטנים האndoוגניים במערכת:

הגדרת המשטנים האndoוגניים כפונקציה של המשטנים האקסוגניים במערכת בלבד.

מספר המושוואות המוצוממות הוא כמספר המשטנים האndoוגניים במערכת (במקרה זה שניים).

תכונות המושוואות מהצורה המוצוממת:

- מס' המושוואות הוא כמספר המשטנים האndoוגניים במערכת (X ו- Y).
- המשטנה המוסף הוא אנדווגני וכל המסבירים אקסוגניים.
- המשטנים המסבירים הם זרים בכל המושוואות (h - Z ים).

- מכיווןSCP של המשתנים המסבירים הם אקסוגניים ניתן לאמוד את הפרמטרים (ה- ג ו ה- ים) ב-OLS ולקבל אומדיים ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיביים עם יכולת לבצע בדיקת השערות.

אמידת הפרמטרים של משוואות המבנה באמצעות משוואות הצורה המוצמצמת: משוואות הצורה המוצמצמת מאפשרות לאמוד את הפרמטרים בשיטת OLS אבל אנחנו מעוניינים למעשה לאמוד את הפרמטרים של המשוואות המקוריות – משוואות המבנה. מתוך הפרמטרים של הצורה המוצמצמת נחלץ את הפרמטרים של משוואות המבנה. בתהליך החילוץ של הפרמטרים המבנויים ייתכנו 3 מצבים:

1. אין זיהוי: לא ניתן לחלץ את הפרמטרים המבנויים מתוך הפרמטרים של הצורה המוצמצמת.
2. זיהוי מדויק: יש רק דרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבנויים מהפרמטרים של הצורה המוצמצמת.
3. זיהוי יתר: יש יותר מדרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבנויים מתוך הפרמטרים של הצורה המוצמצמת.

בכדי להקל על בעיית הזיהוי מומלץ לאמץ את הכלל הבא:
עבור כל אחת מהמשוואות המבניות יש לחשב:

1. $1-g$: מספר אנדרוגניים במשוואת הספציפית פחות 1
וליחסות עס:

2. $K-k$: מספר אקסוגניים שהי'כ בשתי המשוואות כולל חותך (K) פחות מספר אקסוגניים במשוואת הספציפית כולל חותך (k).
אם: $1=2$ זיהוי מדויק; $1>2$ זיהוי יתר; $1<2$ אין זיהוי.

שיטות לפתורן משוואות סימולטניות:

1. שיטת ריבועים פחותים עקיפה (ILS):
 1. יש להציג את מערכת משוואות המבנה בצורתה המוצמצמת.
 2. יש לאמוד בשיטת OLS את הפרמטרים של המשוואות בצורה המוצמצמת.
 3. יש לחלץ מן הפרמטרים של המערכת המוצמצמת את הפרמטרים של הצורה המבנית.

משמעותו של הבדיקה החילז' איננו ליניארי האומדדים המבנאים המתקבלים הם מוטיים אך עקיבים. כאשר הזיהוי מדויק האומדדים יהיו גם אסימפטוטית יעילים (במקרים גדולים). כאשר הזיהוי הוא יתר: האומדדים לא יהיו יעילים.

2. שיטת ריבועים פחותים בשני שלבים (2SLS) :

א. אמידת משוואות הצורה המוצומצמת בשיטת OLS ושימוש בתוצאות האמידה כדי לחשב את המשתנים האנדוגניים (המסבירים).

ב. הצבת המשתנים האנדוגניים שהתקבלו במשוואות המבנה ואמದתו ב-OLS.

אם משוואות המבנה מזוהות בדיק או יותר – האומדדים שיתקבלו יהיו אמינים אבל עקיבים ויעילים אסימפטוטית. האומדדים שיתקבלו יהיו זרים לאומדדים שהתקבלו בשיטת הריבועים הפחותים העקיפה.

כאשר אין זיהוי: אין אקסוגניים וכן אין משתנים מסבירים בצורה המוצומצמת או שכל האקסוגניים בצורה המוצומצמת כבר קיימים במשווהה המקורית ולכן החלפת x ב- \hat{x} תיצור בעיה של מולטיקורליניאריות מלאה.

3. שיטת משתני העזר (IV) :

משתנה עזר הוא משתנה שיחליף את המשתנה המסביר האנדוגני במשוואת המבנה ויעזור לammo את הקשר בין תלוי. משתנה העזר צריך להיות:

1. משתנה אקסוגני או פונקציה ליניארית של משתנים אקסוגניים:

$$\text{cov}(Z, u) = 0.$$

2. מתואם עם המשתנה האנדוגני אותו הוא מחליף: $\text{cov}(Z, X) \neq 0$. ככל שהמתאם גבוה יותר, האומד שיתקבל באמצעותו יהיה טוב יותר.

הבעיה: אומדני OLS שיתקבלו יהיו מוטיים, לא עקיבים ולא יעילים. הפיתרון בשיטת IV: אמידת ההשפעה של Z על X עם משתנה אקסוגני שלא קיים במערכת שמתואם עם Z (אותו הוא מחליף) אך לא עם u . אם יש יותר משתנה עזר אחד המקיים את התנאים הנ"ל, האומדדים שיתקבלו יהיו כולם מוטיים אך עקיבים (ניתן להשתמש בהם במקרים גדולים).

משתנה העזר היחיד שיוביל אומד עיל יהיה בעל המתאים הגובה ביותר עם המשתנה האנדוגני אותו הוא בא להחליף. משתנה עזר זה יהיה אומדן לאנדוגני שהתקבל באמצעות מאמידת משוואת הצורה המוצומצמת בשלב הראשון של 2SLS.

משתנה לא יוכל לשמש כמשנה עוזר :
 אם נוסחו מכך רק משתנים אקסוגניים המצויים במשווה המבנה בה הוא
 משמש כמשנה עוזר, שכן אז תיווצר בעיות מולטיוליניאריות מלאה.
 במקרה אחר, נוסחת המשתנה העוזר צריכה להיות מורכבת מפחות משתנה
 במקרה אחד שלא מופיע במשווה כדי שהמשנה יוכל לשמש כמשנה עוזר.

משתני עוזר שונים יכולים להניב את אותם האומדיים לפרמטרים :
 נבדוק זאת בצורה הבאה : נמחק מהנוסחאות של המשתני העוזר את המשתנים
 האקסוגניים המופיעים במשווה. אם נשארנו עם שני ביוטים שהם מכפלה אחד
 של השני, יתקבלו אותם האומדיים.

סיכום תוצאות אמידה של משוואות סימולטניות :

מס' האומדיים שיתקבלו בשלושת השיטות ותכונותיהם תלויות בזיהוי של
 המשווה :
 אם המשווה לא מזוהה : לא ניתן להשתמש באף אחת מהשיטות.
 כאשר המשווה מזוהה (בדיקה או ביתר) : האומדיים שיתקבלו בשלושת השיטות
 יהיו תמיד מותרים אך עיקבים.
 תכונת הייעילות ומס' האומדיים האפשרי מסוכמים בטבלה הבאה :

מזוהה ביתר	מזוהה בבדיקה	
יתכן יותר מאחד לפרמטר לא יעילים	אומד אחד לפרמטר יעיל	שיטת SLS
אומדן אחד למשנה האנדוגני יעיל		שיטת 2SLS
אין סוף משתני עוזר אם המשתנה העוזר זהה לאומדן לאנדוגני המתkeletal בשלב הראשון בשיטת - 2SLS הוא יהיה גם יעיל .		שיטת IV

כאשר הזיהוי מדויק יתקבל אותו אומד מותה אך עיקיב ויעיל בשלושת השיטות :
 SLS, 2SLS ו-IV (במידה וממשנה העוזר הוא, \hat{X} , מהשלב הראשון של 2SLS).

משתנים בפיגור ומשוואות סימולטניות:

אם X_t אקסוגני אז גם המשתנים בפיגור X_{t-p} בוודאות אקסוגניים.

אם Y_t אנדוגני אז מעמדם של המשתנים בפיגור תלוי בקיומו של מתאם סדרתי:

אם יש מתאם סדרתי: $\text{cov}(Y_{t-1}, u_t) \neq 0$ אז Y_{t-1} אנדוגני.

אם אין מתאם סדרתי: $\text{cov}(Y_{t-1}, u_t) = 0$ אקסוגני.

שאלות:**שיטת IV:****1) נתונות המשוואות הבאות:**

$$\cdot Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot Z_{1t} + \alpha_3 \cdot Z_{2t} + \varepsilon_t \quad .1$$

$$\cdot X_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot Y_t + \beta_2 \cdot Z_{1t} + \omega_t \quad .2$$

נתון כי: Y_t , X_t משתנים אנדוגניים ו- Z_{1t} , Z_{2t} משתנים אקסוגניים.

חו דעתכם על כל אחת מהטענות הבאות, והסבירו:

א. ניתן להשתמש ב- Z_{1t} כמשתנה עזר לאמידת משואה מס' 1.ב. ניתן להשתמש ב- $\frac{Z_{1t} + Z_{2t}}{2}$ כמשתנה עזר לאמידת משואה מס' 2.ג. יתכו מספר אומדים עקיבים שונים זה מזוה ל- β_2 במשואה מס' 2.ד. שימוש ב- Z_{2t} כמשתנה עזר לאמידת משואה מס' 2 יניב אומדים עקיבים וגם יעילים.ה. משתנה העזר $Z_{1t} + 3Z_{2t}$ יניב אומדים זהים לאלו שהתקבלו בסעיף ב'.

הוכיחו את תשובתכם באמצעות המשוואות הנורמליות של משואה 2.

ו. משתנה העזר $3Z_{1t} + 5Z_{2t}$ יניב אותם אומדים כמו משתנה העזר בסעיף ד'.

הוכיחו את תשובתכם באמצעות המשוואות הנורמליות של משואה 2.

תרגיל מסכם:**2) נתונות המשוואות הבאות:**

$$\cdot Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Z_{1t} + \alpha_3 Z_{2t} + \alpha_4 Z_{3t} + \alpha_5 Z_{4t} + u_t \quad .1$$

$$\cdot X_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Z_{1t} + \beta_3 Z_{2t} + \beta_4 Z_{5t} + v_t \quad .2$$

נתון כי: $\text{cov}(Z_j, u_t) = 0$ עבור $j = 1, \dots, 5$ (כלומר ה- Z ים אקסוגניים).

א. אמידת כל אחת מהמשוואות תניב אומדים:

נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

i. מוטים

נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ii. עקיבים

מצויה בדיקוק/מצויה ביותר/בלתי מצויה

b. משואה 1

מצויה בדיקוק/מצויה ביותר/בלתי מצויה

c. משואה 2

ג. חווית דעתך על הטענות הבאות:

i. תוק שימוש בשיטת ILS

ניתן לאמוד את משואה 1

נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

באותן עקיב וחד ערכי:

ii. תוך שימוש בשיטת ILS ניתן לאמוד את משווהה 2 נכוון/לא נכון/לא ניתן לדעת באופן עקיב וחד ערכי :

ד. משוואות הצורה המוצמצמת חן :

$$Y_t = \lambda_0 + \lambda_1 Z_{1t} + \lambda_2 Z_{2t} + \lambda_3 Z_{3t} + \lambda_4 Z_{4t} + \lambda_5 Z_{5t} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_t = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 Z_{2t} + \mu_3 Z_{3t} + \mu_4 Z_{4t} + \mu_5 Z_{5t} + \varepsilon_{2t}$$

נכוון/לא נכון/לא ניתן לדעת.

ה. אמידת משוואות הצורה המוצמצמת ב-OLS תנייב אומדים חסרי הטיה, עקיבים ויעילים : נכוון/לא נכון/אי אפשר לדעת

ו. להלן רשימה של משתני עזר פוטנציאליים :

$$\cdot Z_5 .i$$

$$\cdot \frac{Z_1 + Z_5}{2} .ii$$

$$\cdot 2Z_1 + 3Z_2 + Z_3 .iii$$

$$\cdot Z_3 + Z_4 .iv$$

$$\cdot 3Z_3 + 4Z_4 .v$$

$$\cdot 3Z_3 + 3Z_4 .vi$$

$$\cdot Z_1 .vii$$

עבור כל משתנה רשות באיזה משווה ניתן להשתמש בו אם בכלל.

ז. איזה מבין משתני העזר הבאים יنبيו את אותם האומדים עבור אותה המשווהה (תתכן יותר מתשובה אחת נכון/נכונה) :

$$. i \text{ ו-} .ii$$

$$. vi \text{ ו-} .iv .ii$$

$$. vi \text{ ו-} .v .iii$$

$$. vi \text{ ו-} .iv .iv$$

ח. האם משתנה עזר i (Z_5) יنبي אומדים יעילים?

ט. אם ידוע כי אין מתאם סדרתי, האם X_{t-1}, Y_{t-1} הם אנדרוגניים או אקסוגניים?

י. האם הוספה של משתנה אקסוגני נוסף למשווהה 1 תנסה את הזיהוי של משווהה 2?

יא. האם הוספה של משתנה אקסוגני נוסף למשווהה 2 תנסה את הזיהוי של משווהה 1?

יב. הנח כי הוטלו המגבילות הבאות על הפרמטרים המבנאים : $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. האם ניתן כעת לזיהות את יתר הפרמטרים במודל?

תשובות סופיות:

- 1) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. לא נכון.
ו. נכון.
- 2) א. נכון. ב. לא נכון. ii. לא נכון.
- ב. משואה 1: מזוהה בדיק, משואה 2: מזוהה ביתר.
ג. נכון. ii. לא נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. i. 1. ii. 1. iii. 2. iv. 2.
- .2. v. ז. נכון. ii. נכון. iii. לא נכון. iv. לא נכון.
ח. כן. ט. אקסוגניים. י. לא. יא. כן.
- יב. משואה 1 מזוהה בדיק ומשואה 2 מזוהה ביתר.